



L'effetto di oscuramento al bordo nelle atmosfere stellari

Luigi Costantini

Università di Pisa

Anno Accademico 2021/2022

Docente garante:

Prof. P. G. Prada Moroni

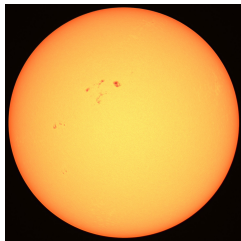


Figure: disco solare [1].

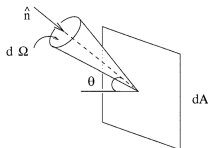


Figure: intensità specifica monocromatica [2].

L'effetto di oscuramento al bordo consiste in una diminuzione dell'intensità luminosa tra centro e bordo stellare.

- Intensità specifica monocromatica $I_\nu(\vec{r}, \hat{n}, t)$:
è l'energia trasportata dalla radiazione per unità di tempo, superficie, angolo solido e frequenza.
- Equazione del trasporto:
permette di trovare l'intensità specifica monocromatica. Definiti α_ν e j_ν coefficienti rispettivamente di assorbimento ed emissione monocromatici, si ha

$$\frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \hat{n}, t)}{\partial s} + \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \hat{n}, t)}{\partial t} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu(\vec{r}, \hat{n}, t) \quad (1)$$

■ Atmosfera a piani paralleli

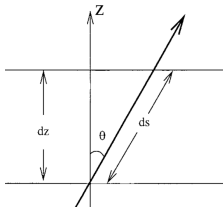


Figure: schema di atmosfera a piani paralleli [2].

Possiamo riscrivere l'equazione (1) come

$$\mu \frac{\partial I_\nu(\tau_\nu, \mu)}{\partial \tau_\nu} = -S_\nu + I_\nu(\tau_\nu, \mu) \quad (2)$$

con $\mu = \cos\theta$, $\partial z = \mu \partial r$, $\partial \tau_\nu = -\alpha_\nu \partial z$.

Per raggi uscenti $\mu \in [0, 1]$, da cui segue

$$I_\nu(\mu, \tau_\nu) = - \int_{+\infty}^{\tau_\nu} \frac{S_\nu(\tau'_\nu)}{\mu} e^{-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}} d\tau'_\nu \quad (3)$$

■ Atmosfera grigia

Assumiamo $\alpha_\nu = \alpha$, dunque consideriamo le grandezze totali integrando sulla frequenza. I momenti di ordine 0 ed 1 dell'equazione del trasporto (2) sono:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dF}{d\tau} = J - S \quad (4)$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{F}{c} \quad (5)$$

■ Equilibrio radiativo

Assumendo costante il flusso, l'equazione (4) diventa

$$J = S \quad (6)$$

mentre la (5) conduce alla relazione

$$P(\tau) = \frac{F}{c}(\tau + q) \quad (7)$$

■ Approssimazione di Eddington

Assumiamo valga $P = \frac{u}{3}$ in ogni regione della stella, essendo $u = \frac{4\pi}{c}J$, l'equazione (7) diventa

$$J(\tau) = S(\tau) = \frac{3F}{4\pi}(\tau + q) \quad (8)$$

per cui la (3), con $\tau = 0$, conduce a

$$I(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi}(\mu + q) \quad (9)$$

L'equazione (9), usando per il flusso la relazione $F = 2\pi \int_0^1 I \mu d\mu$, permette di ottenere

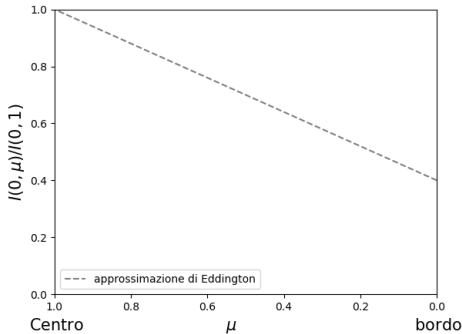
$$q = \frac{2}{3} \quad (10)$$

che, inserito a sua volta nella (9), porta al risultato

$$I(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi} \left(\mu + \frac{2}{3} \right) \quad (11)$$

Possiamo infine dividere per l'intensità della zona centrale ottenendo una funzione dell'angolo

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{3}{5} \left(\mu + \frac{2}{3} \right) \quad (12)$$



In figura è riportato il grafico dell'equazione (12). I raggi provenienti dal centro del disco solare emergono dalla superficie in direzione verticale, quindi con intensità $I(0, 1)$. Al contrario, raggi provenienti da zone progressivamente più vicine al bordo emergeranno con angoli $\theta = \cos^{-1}\mu$ con la verticale, e dunque con $I(0, \mu)$. L'intensità sul bordo del disco solare, prevista dalla (12), arriva ad essere il 40% del valore al centro.

Figure: grafico dell'equazione (12).

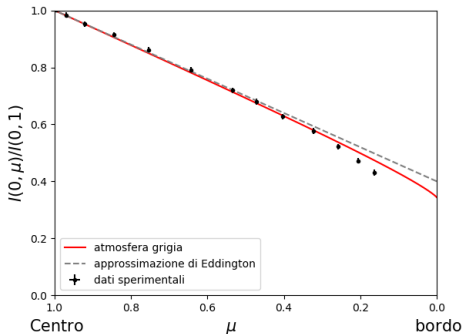


Figure: grafico dell'equazione (12), assieme ai dati sperimentali per $\lambda = 5485\text{\AA}$ [3] ed alla soluzione teorica per atmosfera grigia [4].

In figura, oltre al grafico dell'equazione (12), sono riportati i dati sperimentali. E' inoltre presente la curva che si otterrebbe in assenza dell'approssimazione di Eddington, risolvendo un'equazione integro-differenziale per $I(\tau, \mu)$ ricavabile dalla (2) e dalla (8)^a. Anche in assenza dell'approssimazione di Eddington, la discrepanza dalle osservazioni nelle zone prossime al bordo rimane: essa è dovuta all'approssimazione di atmosfera grigia, non adatta a descrivere accuratamente gli strati più esterni delle atmosfere stellari.

$$^a I(0, \mu)/I(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{\mu+1}} \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta \tan^{-1}(\mu \tan \theta)}{1 - \theta \cot \theta} d\theta \right) [4]$$

Grazie per l'attenzione

- [1] Costantini L. Di Rocco N. (GAF). *Limb Darkening*. URL: <https://www.facebook.com/1387753378151867/posts/3074231532837368/>. (accessed: 10.10.2022).
- [2] Arnab Rai Choudhuri. *Astrophysics for Physicists*. Cambridge University Press, 1981.
- [3] Pierce A. k. McMath R. R. Goldberg L. Mohler O.
“Observations of Solar Limb Darkening Between 0.5 and 10.2 μ ”. In: *Astrophysical Journal* 112 (1950), p. 289.
- [4] Dimitri Mihalas. *Stellar Atmospheres 2nd edn*. Freeman, 1978.